Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт космических и информационных технологий
Кафедра прикладной математики и компьютерной безопасности

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_______ А.А. Кытманов
_______ _______ 2018 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

01.03.04 Прикладная математика

Рациональные выражения для кратных решений
полиномиальных уравнений и систем

Руководитель _____________ профессор, д.ф-м.н. И.А. Антипова
подпись, дата

Выпускник _____________ П.С. Комарова
подпись, дата

Красноярск 2018

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме "Рациональные выражения для кратных решений полиномиальных уравнений и систем" содержит 29 страниц текста, 12 использованных источников.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ, РЕЗУЛЬТАНТ, ДИСКРИМИНАНТ, ДИСКРИМИНАНТНОЕ МНОЖЕСТВО.

Целью работы является изучение метода нахождения кратных решений алгебраических уравнений и систем, основанного на вычислении результантов многочлена и его производных (дискриминанта уравнения или системы). В работе, помимо классических фактов, описаны следующие аспекты теории алгебраических уравнений: дискриминантное множество системы полиномов, стратификация и параметризация дискриминантного множества алгебраического уравнения, параметризация дискриминантного множества системы уравнений. Кроме того, приведены формулировки теорем, лежащих в основе изучаемого метода. Все изложенные в работе техники исследования решений уравнений и систем сопровождены примерами. Результат выпускной работы может быть использован в учебном процессе при чтении курса «Решение полиномиальных уравнений. Теория и алгоритмы».

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Проблема решения алгебраических уравнений интересует математиков уже несколько тысячелетий. Однако лишь в XVI веке Н. Тарталья, Д. Кардано и Л. Феррари нашли решения уравнений третьей и четвертой степеней в радикалах. Надежду решить в радикалах уравнения более высоких степеней развеяли Н. Абель и Э. Галуа в начале XIX века, доказав невозможность найти формулы, выражающие при помощи радикалов решения любого уравнения степени $n \geqslant 5$ через его коэффициенты. Дальнейшие продвижения в теории алгебраических уравнений осуществлялись методами трансцендентного анализа. Идею аналитического решения предложил Ф. Виет. Воплощать её в жизнь довелось целой плеяде математиков: Ш. Эрмиту, Л. Кронекеру, Я. Меллину и др.

В современной математике существует ряд фундаментальных проблем, вокруг которых сосредоточены задачи, связанные с исследованием свойств алгебраических функций, о чем свидетельствуют работы [1], [2], [6], [8], [9], [10].

Бакалаврская работа посвящена методу нахождения кратных решений систем алгебраических уравнений. Кратные корни системы уравнений (в частности, одного уравнения) характеризуются тем, что в них система обращается в нуль вместе со своим якобианом (или производной, в случае одного уравнения). Другими словами, корень системы может быть кратным тогда и только тогда, когда коэффициенты системы принадлежат множеству нулей её дискриминанта. В недавней работе [1] доказано, что на некоторых стратах дискриминантного множества кратные корни общего алгебраического уравнения выражаются рациональным образом через коэффициенты уравнения. Аналогичные выражения имеют место быть и для кратных решений систем n полиномиальных уравнений от n неизвестных.

Цель работы - изучить метод нахождения рациональных выражений для кратных решений алгебраических уравнений и систем. Указанный метод основан на вычислении результантов многочлена и его производных, в частности, дискриминанта уравнения или системы. Поэтому для достижения обозначенной цели необходимо:

- уметь вычислять результант двух полиномов,

- знать определение дискриминанта алгебраического уравнения и системы алгебраических уравнений,

- иметь представление о стратификации дискриминантного множества,

- знать, понимать и уметь применять на практике теоремы о параметризации дискриминантного множества уравнения (системы уравнений),

- уметь применять метод нахождения кратных решений алгебраических уравнений и систем, изложенный в работе [1].

Бакалаврская работа состоит из трех разделов. Разделы 1 и 2 содержат классические факты теории алгебраических уравнений, связанные с решением уравнений в радикалах [3]. В Разделе 3 изложен метод нахождения кратных решений алгебраических уравнений и систем, основанный на результатах современных работ [1], [2], [4], [12]. Все изложенные в работе методы исследования решений уравнений и систем сопровождены примерами. Вычисления проведены с использованием системы компьютерной алгебры MAPLE 12.

1 Классический дискриминант

1.1 Результант двух многочленов

Рассмотрим многочлены

$$\begin{cases} f(y) = a_0 y^k + a_1 y^{k-1} + \dots + a_k, \\ g(y) = b_0 y^m + b_1 y^{m-1} + \dots + b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

Выясним, при каком условии на коэффициенты многочленов f и g они имеют общий непостоянный множетель (или общий корень). Предположим, что хотя бы один из старших коэффициентов a_0 или b_0 отличен от нуля. Рассмотрим определитель, составленный из коэффициентов многочленов f и g:

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_k & & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & a_k & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & a_0 & a_1 & \dots & a_k \\ b_0 & b_1 & \dots & b_m & & & \\ & b_0 & b_1 & \dots & b_m & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & b_0 & b_1 & \dots & b_m \end{vmatrix} \tag{1.2}$$

Определение 1.1 *Определитель R называется результантом многочленов f и g. Он представляет собой многочлен*

$$R = \sum_{I=(i_0,\dots,i_k),J=(j_0,\dots,j_m)} r_{IJ} a_0^{i_0} \cdot \ldots \cdot a_k^{i_k} \cdot b_0^{j_0} \cdot \ldots \cdot b_m^{j_m} \tag{1.3}$$

от коэфициентов $a_0, \dots, a_k, b_0, \dots, b_m$ многочленов f и g.

Теорема 1.1 *Результант $R = 0$ тогда и только тогда, когда многочлены f и g имеют общий корень, либо одновременно $a_0 = 0$, $b_0 = 0$.*

Для результанта R существует представление в терминах корней многочленов (1.1). Пусть многочлен $f(y)$ имеет корни $\{\alpha_i\}$, а многочлен $g(y)$ и имеет корни $\{\beta_j\}$. Тогда результант представляется в виде:

$$R(f,g) = a_0^m b_0^k \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{m} (\alpha_i - \beta_j). \tag{1.4}$$

1.2 Дискриминант многочлена

Поставим вопрос об условиях, при которых многочлен $f(y)$ степени k из кольца полиномов $\mathbb{C}[y]$ обладает кратными корнями. Пусть

$$f(y) = a_0 y^k + a_1 y^{k-1} + \cdots + a_{k-1} y + a_k,\ a_0 \neq 0,$$

и пусть в поле $\mathbb{P}$ этот многочлен имеет корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Очевидно, что среди этих корней тогда и только тогда будут равные, если равно нулю произведение

$$\begin{aligned} \Delta = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1) \ldots (\alpha_k - \alpha_1) \times \\ \times (\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2) \ldots (\alpha_k - \alpha_2) \times \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \times (\alpha_k - \alpha_{k-1}) = \prod_{k \geqslant i > j \geqslant 1} (\alpha_i - \alpha_j) \end{aligned}$$

или, что то же, если равно нулю произведение

$$D = a_0^{2k-2} \prod_{k \geqslant i > j \geqslant 1} (\alpha_i - \alpha_j)^2,$$

называемое дискриминантом многочлена $f(y)$.

В отличие от произведения Δ, которое может менять знак при перестановке корней, дискриминант, D симметричен относительно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ и поэтому может быть выражен через коэффициенты многочлена $f(y)$. Воспользуемся связью, существующей между дискриминантом многочлена $f(y)$ и результантом этого многочлена и его производной. Многочлен $f(y)$ тогда и только тогда обладает кратными корнями, если у него есть общие корни с производной $f'(y)$, а поэтому

$$D = 0 \Leftrightarrow R(f, f') = 0,$$

причем,

$$R(f, f') = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} a_0^{2k-1} \prod_{k \geqslant i > j \geqslant 1} (\alpha_i - \alpha_j)^2 = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} a_0 D.$$

1.3 Примеры

1. Найдем дискриминант квадратного трехчлена

$$f(y) = a_0 y^2 + a_1 y + a_2.$$

Так как $f'(y) = 2a_0 y + a_1$, то

$$R(f, f') = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 2a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & 2a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_0(-a_1^2 + 4a_0 a_2).$$

В нашем случае $\frac{k(k-1)}{2} = 1$ и поэтому

$$D = -a_0^{-1} R(f, f') = a_1^2 - 4a_0 a_2.$$

2. Вычислим дискриминант многочлена

$$f(y) = a_0 y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3.$$

Так как $f'(y) = 3a_0 y^2 + 2a_1 y + a_2$, то

$$R(f, f') = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 3a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 3a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 3a_0 & 2a_1 & a_2 \end{vmatrix} =$$

$$= 27a_0^3a_3^2 - 18a_0^2a_1a_2a_3 + 4a_0^2a_2^3 + 4a_0a_1^3a_3 - a_0a_1^2a_2^2.$$

Следовательно,

$$D = -27a_0^2a_3^2 + 18a_0a_1a_2a_3 - 4a_0a_2^3 - 4a_1^3a_3 + a_1^2a_2^2.$$

3. Вычислим дискриминант многочлена

$$f(y) = a_0y^4 + a_1y^3 + a_2y^2 + a_3y + a_4.$$

Так как $f'(y) = 4a_0y^3 + 3a_1y^2 + 2a_2y + a_3$, то

$$R(f, f') = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 4a_0 & 3a_1 & 2a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4a_0 & 3a_1 & 2a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4a_0 & 3a_1 & 2a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4a_0 & 3a_1 & 2a_2 & a_3 \end{vmatrix} =$$

$$= 256a_0^4a_4^3 - 192a_0^3a_1a_3a_4^2 - 128a_0^3a_2^2a_4^2 + 144a_0^3a_2a_3^2a_4 - 27a_0^3a_3^4 + 144a_0^2a_1^2a_2a_4^2 -$$
$$- 6a_0^2a_1^2a_3^2a_4 - 80a_0^2a_1a_2^2a_3a_4 + 18a_0^2a_1a_2a_3^3 + 16a_0^2a_2^4a_4 - 4a_0^2a_2^3a_3^2 - 27a_0a_1^4a_4^2 +$$
$$+ 18a_0a_1^3a_2a_3a_4 - 4a_0a_1^3a_3^3 - 4a_0a_1^2a_2^3a_4 + a_0a_1^2a_2^2a_3^2.$$

$$D = -256a_0^3a_4^3 + 192a_0^2a_1a_3a_4^2 + 128a_0^2a_2^2a_4^2 - 144a_0^2a_2a_3^2a_4 + 27a_0^2a_3^4 -$$
$$- 144a_0a_1^2a_2a_4^2 + 6a_0a_1^2a_3^2a_4 + 80a_0a_1a_2^2a_3a_4 - 18a_0a_1a_2a_3^3 - 16a_0a_2^4a_4 +$$
$$+ 4a_0a_2^3a_3^2 + 27a_1^4a_4^2 - 18a_1^3a_2a_3a_4 + 4a_1^3a_3^3 + 4a_1^2a_2^3a_4 - a_1^2a_2^2a_3^2.$$

2 Решение алгебраических уравнений в радикалах. История вопроса

2.1 Кубические уравнения

Пусть дано кубическое уравнение

$$y^3 + a_1y^2 + a_2y + a_3 = 0 \tag{2.1}$$

с переменными комплексными коэффициентами. Заменяя в уравнении (2.1) неизвестное y новым неизвестным x, связанным с y равенством

$$y = x - \frac{a_1}{2}, \tag{2.2}$$

мы получим уравнение относительно неизвестного x, не содержащее, как легко проверить, квадрата этого неизвестного, т. е. уравнение вида

$$x^3 + px + q = 0. \tag{2.3}$$

Если будут найдены корни уравнения (2.3), то ввиду (2.2), мы получим и корни заданного уравнения (2.1). Уравнение (2.3) обладает тремя комплексными корнями. Далее приведем формулы для корней уравнения (2.3), которые называют формулами Кардано (по имени итальянского математика Д. Кардано), хотя исторически к исследованию этого вопроса обрашались многие математики (Н. Тарталья, Л Феррари, Ф. Виет и др.) Формула Кардано имеет вид:

$$x_0 = \alpha + \beta,$$

где

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},\ \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \tag{2.4}$$

Так как кубичный радикал имеет в поле комплексных чисел три значения, то формулы (2.4) дают три значения для α и три для β. Нельзя, однако, применяя формулу Кардано, комбинировать любое значение радикала α с любым значением радикала β: для данного значения α следует брать лишь то из трех значений β, которое удовлетворяет условию

$$\alpha\beta = -\frac{p}{3}. \tag{2.5}$$

Пусть α_1 будет любое из трех значений радикала α. Тогда два других можно получить умножением α_1 на кубичные корни ε и ε^2 из единицы:

$$\alpha_2 = \alpha_1\varepsilon,\ \alpha_3 = \alpha_1\varepsilon^2.$$

Обозначим через β_1 то из трех значений радикала β, которое соответствует значению α_1 радикала α на основании (2.5). Два других значения β будут

$$\beta_2 = \beta_1\varepsilon,\ \beta_3 = \beta_1\varepsilon^2.$$

Так как, ввиду $\varepsilon^3 = 1$,

$$\alpha_2\beta_3 = \alpha_1\varepsilon\cdot\beta_1\varepsilon^2 = \alpha_1\beta_1\varepsilon^3 = \alpha_1\beta_1 = -\frac{p}{3},$$

то значению α_2 радикала α соответствует значение β_3 радикала β; аналогично значению α_3 соответствует значение β_2. Таким образом, все три корня уравнения (2.3) могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 + \beta_1, \\ x_2 = \alpha_2 + \beta_3 = \alpha_1\varepsilon + \beta_1\varepsilon^2, \\ x_3 = \alpha_3 + \beta_2 = \alpha_1\varepsilon^2 + \beta_1\varepsilon. \end{cases}$$

Рассмотрим неполное кубичное уравнение (2.3) при условии, что его коэффициенты действительны. В этом случае основную роль играет знак выражения $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, стоящего в формуле Кардано под знаком квадратного корня. Знак этого выражения противоположен знаку выражения

$$D = -4p^3 - 27q^2 = -108\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right),$$

называемого дискриминантом уравнения (2.3).

1) Пусть $D < 0$. В этом случае в формуле Кардано под знаком каждого из квадратных радикалов стоит положительное число, а поэтому под знаком каждого из кубичных радикалов оказываются действительные числа. Уравнение (2.3) имеет один действительный и два сопряженных комплексных корня.

2) Пусть $D = 0$, то все корни уравнения (2.3) действительны, причем два из них равны между собой.

3) Пусть $D > 0$, то уравнение (2.3) имеет три различных действительных корня.

2.2 Уравнения четвертой степени

Решение уравнения четвертой степени

$$y^4 + a_1y^3 + a_2y^2 + a_3y + a_4 = 0 \tag{2.6}$$

с произвольными комплексными коэффициентами сводится к решению вспомогательного кубического уравнения. Достигается это следующим методом, принадлежащим Л. Феррари.

Предварительно уравнение (2.6) подстановкой $y = x - \frac{a_1}{4}$ приводится к виду

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0. \tag{2.7}$$

Затем левая часть этого уравнения следующим образом тождественно преобразуется при помощи вспомогательного параметра α:

$$x^4 + px^2 + qx + r = \left(x^2 + \frac{p}{2} + \alpha\right)^2 + qx + r - \frac{p^2}{4} - \alpha^2 - 2\alpha x^2 - p\alpha$$

или

$$\left(x^2 + \frac{p}{2} + \alpha\right)^2 - \left[2\alpha x^2 - qx + \left(\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4}\right)\right] = 0. \tag{2.8}$$

Подберем теперь α так, чтобы многочлен, стоящий в квадратных скобках, стал полным квадратом. Для этого он должен иметь один двукратный корень, т. е. должно иметь место равенство

$$q^2 - 4 \cdot 2\alpha \left(\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4} \right) = 0. \tag{2.9}$$

Равенство (2.9) является кубическим уравнением относительно неизвестного α с комплексными коэффициентами. Это уравнение имеет три комплексных корня. Пусть α_0 будет один из них; он выражается ввиду формулы Кардано при помощи радикалов через коэффициенты уравнения (2.9), т. е. через коэффициенты уравнения (2.7).

При этом выборе значения для α многочлен, стоящий в квадратных скобках в (2.8), имеет двукратныйкорень $\frac{q}{4\alpha_0}$, и поэтому уравнение (2.8) принимает вид

$$\left(x^2 + \frac{p}{2} + \alpha_0 \right)^2 - 2\alpha_0 \left(x - \frac{q}{4\alpha_0} \right)^2 = 0,$$

т. е. оно распадается на два квадратных уравнения:

$$\begin{cases} x^2 - \sqrt{2\alpha_0}x + \left(\dfrac{p}{2} + \alpha_0 + \dfrac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}} \right) = 0, \\ x^2 + \sqrt{2\alpha_0}x + \left(\dfrac{p}{2} + \alpha_0 + \dfrac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}} \right) = 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Так как от уравнения (2.7) к уравнениям (2.10) мы пришли при помощи тождественных преобразований, то корни уравнений (2.10) будут служить корнями и для уравнения (2.7). Легко видеть вместе с тем, что корни уравнения (2.7) выражаются через коэффициенты при помощи радикалов.

3 Кратные решения алгебраических уравнений и систем

3.1 Рациональные выражения для кратных корней алгебраических уравнений

В то время как методами решения квадратных уравнений владели ещё древние греки, открытие изложенных выше методов решения уравнений третьей и четвертой степени относится к XVI веку. После этого продолжались безуспешные попытки сделать следующий шаг, т. е. найти формулы, выражающие при помощи радикалов корни любого уравнения пятой степени (т. е. уравнения пятой степени с буквенными коэффициентами) через его коэффициенты. Эти попытки прекратились лишь после того, как Н. Х. Абель в двадцатых годах XIX века доказал,что такие формулы для уравнений k-й степени при любом $k \geq 5$ заведомо не могут быть найдены.

Этот результат Н. Х. Абеля не исключал возможности того, что корни конкретного многочлена с числовыми коэффициентами все же каким-либо способом выражаются через коэффициенты при помощи некоторой комбинации радикалов или рациональным образом. Полностью вопрос об условиях, при которых данное уравнение разрешимо в радикалах, был исследован Э. Галуа в тридцатых годах XIX века. Оказалось, что для всякого k, начиная с k=5, можно указать неразрешимые в радикалах уравнения k-й степени даже с целочисленным коэффициентами. Таким будет, например, уравнение

$$y^5 - 4y - 2 = 0.$$

Однако, как оказалось, рациональные выражения от коэффициентов для кратных корней алгебраических уравнений в некоторых случаях могут быть найдены. Рассмотрим уравнение

$$f(y) = y^k + a_{k-1}y^{k-1} + \cdots + a_1 y + a_0 = 0 \tag{3.1}$$

с неизвестным y и с переменными коэффициентами $a = (a_0, \ldots, a_{k-1}) \in \mathbb{C}^k$. Для исследования кратных решений нам необходимо ввести понятие дискриминанта.

Определение 3.1 *Дискриминантом алгебраического уравнения* (3.1) *называют многочлен от коэффициентов уравнения*

$$D(a) = D(a_0, \ldots, a_{k-1}) = \sum_{\lambda=(\lambda_0,\ldots,\lambda_{k-1})} C_\lambda a_0^{\lambda_0} \cdot \ldots \cdot a_{k-1}^{\lambda_{k-1}},$$

который обращается в нуль тогда и только тогда, когда уравнение (3.1) *имеет хотя бы один кратный корень.*

Дискриминант уравнения есть неприводимый многочлен от коэффициентов уравнения, т.е. он неразложим на нетривиальные многочлены (не константы).

Определение 3.2 *Множество*

$$\nabla = \{a : D(a) = 0\} \subset \mathbb{C}^k$$

называется дискриминантным множеством уравнения (3.1).

Дискриминантное множество ∇ допускает стратификацию, т.е. разбивается на страты $\mathbf{M}^{d_1,\ldots,d_r}$, состоящие из многочленов вида

$$f(y) = (y - t_1)^{d_1} \ldots (y - t_r)^{d_r},\ d_1 + \cdots + d_r = k.$$

Впервые такая стратификация была предложена Д. Гильбертом [7]. Исследование стратов дискриминантного множества посвящены современные работы [10], [9], [4]. Замыкание страта $\mathbf{M}^\nu := \mathbf{M}^{\nu,\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1}}$ состоит из многочленов (3.1), имеющих корни кратности не ниже ν, в частности, замыкание $\mathbf{M}^\mathbf{2}$ совпадает со всем дискриминантным множеством ∇. Страту $\mathbf{M}^\nu$ соответствуют многочлены, имеющие единственный кратный корень (кратности ν).

Для вычисления ν-кратных корней на страте $\mathbf{M}^\nu$ введем многочлен

$$\Delta^{(\nu)}(a) = R(f, f^{(\nu-1)})$$

- результант f и его производной $f^{(\nu-1)}$ (по y) порядка $\nu-1$. Заметим, что $\Delta^{(2)}(a)=D(a)$ — дискриминант полинома f.

Теорема 3.1 [1] *Если $\nu \geq 3$, то для $a \in \mathbf{M}^\nu$ ν-кратное ненулевое решение $y(a)$ уравнения* (3.1) *выражается через частные производные $\Delta_i^{(\nu)} = \frac{\partial \Delta^{(\nu)}}{\partial a_i}$, по формулам*

$$y(a)=\frac{\Delta_1^{(\nu)}}{\Delta_0^{(\nu)}}=\cdots=\frac{\Delta_{\nu-2}^{(\nu)}}{\Delta_{\nu-3}^{(\nu)}}. \tag{3.2}$$

Если $\nu=2$, то для $a \in \mathbf{M^2}$ двукратное ненулевое решение $y(a)$ уравнения (3.1) *выражается через производные $D_k=\frac{\partial D}{\partial a_k}$ дискриминанта по формулам*

$$y(a)=\frac{D_1}{D_0}=\frac{D_2}{D_1}=\cdots=\frac{D_{k-1}}{D_{k-2}}. \tag{3.3}$$

Уравнение (3.1) является приведенным вариантом общего алгебраического уравнения степени k:

$$a_k y^k+\cdots+a_1 y+a_0=0. \tag{3.4}$$

Вся информация о решениях уравнения (3.4) может быть получено из приведенного уравнения, в котором зафиксированы два коэффициента

$$y^k+x_{k-1}y^{k-1}+\cdots+x_1 y-1=0. \tag{3.5}$$

Существует мономиальная замена коэффициентов $x=x(a)$, которая переводит уравнение (3.5) в уравнение (3.4) (см. [12]). Этот факт основан на свойстве биоднородности решения алгебраического уравнения (3.4). Корни уравнения (3.4) на самом деле являются функциями $(k-1)$ переменной. Заметим, что двукратное решение уравнения (3.5) выражается формулами

$$y(x)=\frac{D_2}{D_1}=\frac{D_3}{D_2}=\cdots=\frac{D_{k-1}}{D_{k-2}},\ x \in \mathbf{M^2}.$$

Кроме того, двукратные решения на страте $\mathbf{M^2}$ уравнения (3.4) могут быть найдены по формулам

$$y(a)=\frac{D_1}{D_0}=\frac{D_2}{D_1}=\cdots=\frac{D_k}{D_{k-1}}. \tag{3.6}$$

Вывод формул (3.6) основан на соотношениях (3.3) и свойстве биоднородности решения уравнения.

3.2 Параметризация приведенного дискриминантного множества

Рассмотрим приведенное алгебраическое уравнение (3.5). Напомним, что в нем фиксированы коэффициенты при y^k и свободный член. Обозначим через ∇_{0k} его дискриминантное множество. Оно допускает k-значную параметризацию, параметр s принадлежит комплексному проективному пространству $\mathbb{CP}^{k-2}$.

Определение 3.3 $(k-2)$ *— мерным комплексным проективным пространством* $\mathbb{CP}^{k-2}$ *называется множество классов эквивалентности в* $\mathbb{C}^{k-1}\setminus\{0\}$ *по отношению* $\sim$*, т.е.*

$$\mathbb{CP}^{k-2} := \mathbb{C}^{k-1} \setminus \{0\}/\sim .$$

Отношение эквивалентности $\sim$ на множестве точек $\mathbb{C}^{k-1} \setminus \{0\}$ определяется следующим образом:

$$(x'_1, \dots, x'_{k-1}) \sim (x_1, \dots, x_{k-1}),$$

если существует ненулевой элемент $\lambda \in \mathbb{C}$, такой, что

$$(x'_1, \dots, x'_{k-1}) = \lambda(x_1, \dots, x_{k-1}).$$

Иначе говоря

$$\mathbb{CP}^{k-2} \cong \{\text{прямые в } \mathbb{C}^{k-1}, \text{проходящие через начало координат}\}.$$

Теорема 3.2 [12] *Дискриминантное множество* ∇_{0k} *уравнения* (3.5) *допускает параметризацию*

$$x_j = \frac{ks_j}{\langle \beta, s\rangle}\left(-\frac{\langle \beta, s\rangle}{\langle \alpha, s\rangle}\right)^{j/k},\ j = 1, \ldots, k-1,$$

где $s \in \mathbb{CP}^{k-2},\ \alpha = (1, 2, \ldots, k-1), \beta = (k-1, k-2, \ldots, 1).$

Все ветви указанной параметризации получаются выбором всех значений радикала $\left(-\frac{\langle \beta, s\rangle}{\langle \alpha, s\rangle}\right)^{1/k}$.

3.3 Примеры

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y^3 + x_2y^2 + x_1y - 1 = 0.$$

Для него имеем

$$\alpha = (1, 2),\ \beta = (2, 1),\ s = (s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Согласно Теореме 3.2 параметризация дискриминантного множества ∇_{03} имеет вид:

$$x_1 = \frac{3s_1}{2s_1 + s_2} \cdot \left(-\frac{2s_1 + s_2}{s_1 + 2s_2}^{1/3}\right),\ x_2 = \frac{3s_2}{2s_1 + s_2} \cdot \left(-\frac{2s_1 + s_2}{s_1 + 2s_2}\right)^{2/3}. \tag{3.7}$$

В силу однородности воспользуемся соотношением:

$$\frac{s_2}{s_1} = s$$

и перепишем (3.7) в виде:

$$x_1 = \frac{3}{2 + s} \cdot \left(-\frac{2 + s}{1 + 2s}^{1/3}\right),\ x_2 = \frac{3s}{2 + s} \cdot \left(-\frac{2 + s}{1 + 2s}\right)^{2/3} \tag{3.8}$$

Исключив параметр s из параметризации (3.8), получим дискриминант приведенного кубического уравнения:

$$D_{03} = -27 + 18x_1x_2 - 4x_2^3 - 4x_1^3 + x_1^2x_2^2.$$

Пример 2. Рассмотрим квадратное уравнение

$$f(y) = a_0y^2 + a_1y + a_2.$$

Как известно

$$D = -a_0^{-1}R(f, f') = a_1^2 - 4a_0a_2.$$

Воспользуемся формулой (3.6):

$$y(a) = \frac{D'_{a1}}{D'_{a2}} = \frac{(a_1^2 - 4a_0a_2)'_{a1}}{(a_1^2 - 4a_0a_2)'_{a2}} = -\frac{a_1}{2a_0}.$$

Получили известную формулу корня кратности 2 для квадратного уравнения.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$f(y) = y^4 + a_1y^3 + a_2y^2 + a_3y + a_4. \tag{3.9}$$

Так как $f''(y) = 12y^2 + 6a_1y + 2a_2$, то

$$R(f, f'') = 16(1296a_4^2 - 648a_1a_3a_4 - 360a_2^2a_4 + 216a_2a_3^2 + 432a_1^2a_2a_4-$$
$$- 126a_1a_2^2a_3 + 25a_2^4 - 81a_1^4a_4 + 27a_1^3a_2a_3 - 6a_1^2a_2^3).$$

По формулам (3.2) кратное ненулевое решение уравнения (3.9) выражается в виде:

$$y(a) = \frac{-72a_1a_4 + 48a_2a_3 - 14a_1a_2^2 + 3a_1^3a_2}{288a_4 - 72a_1a_3 - 40a_2^2 + 48a_1^2a_2 - 9a_1^4}.$$

Если $a_1 = -\frac{7}{2},\ a_2 = \frac{9}{2},\ a_3 = -\frac{5}{2},\ a_4 = \frac{1}{2}$, то уравнение

$$y^4 - \frac{7}{2}y^3 + \frac{9}{2}y^2 - \frac{5}{2}y + \frac{1}{2} = 0$$

имеет корень $y = 1$ кратности 3.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$f(y) = a_0y^5 + a_1y^4 + a_2y^3 + a_3^2y + a_4 + a_5. \tag{3.10}$$

Так как $f''(y) = 20a_0y^3 + 12a_1y^2 + 6a_2y + 2a_3$, то

$$R(f, f'') = -32a_0(100000a_0^4a_5^3 - 60000a_0^3a_1a_4a_5^2 - 75000a_0^3a_2a_3a_5^2 + 30000a_0^3a_2a_4^2a_5+$$
$$+ 27000a_0^3a_3^2a_4a_5 - 10000a_0^3a_3a_4^3 + 42000a_0^2a_1^2a_3a_5^2 + 45000a_0^2a_1a_2^2a_5^2 - 26400a_0^2a_1a_2a_3a_4a_5-$$
$$- 10800a_0^2a_1a_3^3a_5 + 6600a_0^2a_1a_3^2a_4^2 - 12600a_0^2a_2^3a_4a_5 + 10650a_0^2a_2^2a_3^2a_5 + 4200a_0^2a_2^2a_3a_4^2-$$
$$- 4320a_0^2a_2a_3^3a_4 + 729a_0^2a_3^5 - 32400a_0a_1^3a_2a_5^2 + 1440a_0a_1^3a_3a_4a_5 + 14040a_0a_1^2a_2^2a_4a_5+$$
$$+ 6480a_0a_1^2a_2a_3^2a_5 - 4680a_0a_1^2a_2a_3a_4^2 + 168a_0a_1^2a_3^3a_4 - 7740a_0a_1a_2^3a_3a_5 + 2286a_0a_1a_2^2a_3^2a_4-$$
$$- 459a_0a_1a_2a_3^4 + 1323a_0a_2^5a_5 - 441a_0a_2^4a_3a_4 + 98a_0a_2^3a_3^3 + 5184a_1^5a_5^2 - 2592a_1^4a_2a_4a_5-$$
$$- 1440a_1^4a_3^2a_5 + 864a_1^4a_3a_4^2 + 1728a_1^3a_2^2a_3a_5 - 504a_1^3a_2a_3^2a_4 + 100a_1^3a_3^4 - 324a_1^2a_2^4a_5+$$
$$+ 108a_1^2a_2^3a_3a_4 - 24a_1^2a_2^2a_3^3).$$

По формулам (3.2) выражение трехкратного кореня уравнения (3.10) имеет вид:

$$y(a) = ((-20000a_1a_5^2 + 20000a_2a_4a_5 + 9000a_3^2a_5 - 10000a_3a_4^2)a_0^3 + ((-8800a_2a_3a_5+$$
$$+ 4400a_3^2a_4)a_1 - 4200a_2^3a_5 + 2800a_2^2a_3a_4 - 1440a_2a_3^3)a_0^2 + (480a_1^3a_3a_5 + (4680a_2^2a_5-$$
$$- 3120a_2a_3a_4 + 56a_3^3)a_1^2 + 762a_1a_2^2a_3^2 - 147a_2^4a_3)a_0 + (-864a_2a_5 + 576a_3a_4)a_1^4 - 168a_1^3a_2a_3^2+$$
$$+ 36a_1^2a_2^3a_3)/(100000a_0^4a_5^2 + (-40000a_1a_4a_5 + (-50000a_3a_5 + 10000a_4^2)a_2 + 9000a_3^2a_4)a_0^3+$$
$$+ (28000a_1^2a_3a_5 + (30000a_2^2a_5 - 8800a_2a_3a_4 - 3600a_3^3)a_1 - 4200a_2^3a_4 + 3550a_2^2a_3^2)a_0^2+$$
$$+ ((-21600a_2a_5 + 480a_3a_4)a_1^3 + (4680a_2^2a_4 + 2160a_2a_3^2)a_1^2 - 2580a_1a_2^3a_3 + 441a_2^5)a_0+$$
$$+ 3456a_1^5a_5 + (-864a_2a_4 - 480a_3^2)a_1^4 + 576a_1^3a_2^2a_3 - 108a_1^2a_2^4).$$

Если $a_0 = 1,\ a_1 = -5,\ a_2 = 3,\ a_3 = 22,\ a_4 = -44,\ a_5 = 24$, то корень уравнения $y^5 - 5y^4 + 3y^3 + 22y^2 - 44y + 24 = 0$ кратности 3 равен 2.

3.4 Рациональные выражения для кратных решений полиномиальных систем

Рассмотрим общую алгебраическую систему n уравнений с n неизвестными

$$P_i(a, y) := \sum_{\lambda \in A^{(i)}} a_\lambda^{(i)} y^\lambda = 0,\ i = 1, \dots, n, \tag{3.11}$$

в которой $A^{(i)} \subset \mathbb{Z}^n$ - фиксированные конечные подмножества целочисленной решетки, все $a_\lambda^{(i)}$ - переменные комплексные коэффициенты, и для $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ из $\mathbb{Z}^n$ символом y^λ обозначен моном $y_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot y_n^{\lambda_n}$.

Пусть ∇^0 - множество всех коэффициентов в системе (3.11), при которых она имеет кратные корни. Это множество задается в виде:

$$\nabla^0 = \{a = (a_\lambda^{(i)}) : P_1(a, y) = \cdots = P_n(a, y) = J_y(a, y) = 0, \ y \in (\mathbb{C} \setminus 0)^n\},$$

здесь $J_y(a, y)$ - якобиан системы полиномов (3.11).

Определение 3.4 *Дискриминантным множеством* ∇ *системы* (3.11) *называется множество всех коэффициентов системы, при которых она имеет кратные корни.*

В работе [1] исследованы кратные корни систем (3.11) на множестве гладких точек ∇_{reg} дискриминантного множества, т.е. приведен многомерный аналог первого утверждения Теоремы 3.2.

Рассмотрим приведенную систему уравнений

$$y^{\omega^{(i)}} + \sum_{\lambda \in \Lambda^{(i)}} x_\lambda^{(i)} y^\lambda - 1 = 0, \ i = 1, \ldots, n, \tag{3.12}$$

в которой все $x_\lambda^{(i)}$ - переменные комплексные коэффициенты, а выделенные мультистепени $\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(n)} \subset \mathbb{Z}^n$ линейно независимы. Поскольку в определении дискриминантного множества ∇ системы (3.11) рассматриваются решения $y \in (\mathbb{C} \setminus 0)^n$, можно считать, что каждое уравнение в (3.11) содержит свободный член, т.е. что все множества $A^{(i)}$ содержат нулевой элемент $\overline{0}$ (этого можно добиться делением i-го уравнения в (3.11) на моном с показателем из $A^{(i)}$). Поэтому наборы показателей $A^{(i)}$ и $\Lambda^{(i)}$ в системах (3.11) и (3.12) можно считать связанными соотношениями $\Lambda^{(i)} = A^{(i)} \setminus \{\omega^{(i)}, \overline{0}\}$. Коэффициенты $x_\lambda^{(i)}$ приведенной системы выражаются через коэффициенты $a_\lambda^{(i)}$ системы (3.11) с помощью процедур деления и перехода к радикалам. Поэтому исследуем кратные корни приведенной системы (3.12).

Обозначим через Λ дизъюнктное объединение множеств $\Lambda^{(i)}$. Элементы дизъюнктного объединения — это, фактически, упорядоченные пары (λ, i), где i есть индекс, показывающий, из какого множества $\Lambda^{(i)}$ элемент λ вошел в объединение. Если Λ состоит из N элементов, то его можно интерпретировать как $n \times N$ матрицу

$$\Lambda = (\Lambda^{(1)}, \ldots, \Lambda^{(n)}) = (\lambda^1, \ldots, \lambda^N),$$

столбцами, которой являются векторы λ^k из показателей мономов системы (3.12). В блок $\Lambda^{(i)}$ входят столбцы из показателей i-го уравнения, где их нумерация зафиксирована. Тем самым, упорядочиваем элементы $\lambda \in \Lambda$, а также нумеруемые ими наборы коэффициентов $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ системы (3.12), пробегающие пространство $\mathbb{C}^N$.

В приведенной системе уравнений (3.12) обозначим матрицу из вектор-столбцов $\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(n)}$ через ω. Введем две $(n \times N)$ — матрицы

$$\Phi := \omega^{-1}\Lambda, \ \bar{\Phi} = \Phi - \chi,$$

где χ – матрица, i-я строка которой представляет характеристическую функцию подмножества $\Lambda^{(i)} \subset \Lambda$, т.е. элементы этой строки равны 1 на местах $\lambda \in \Lambda^{(i)}$ и 0 – на всех остальных местах $\lambda \in \Lambda$. Строки матриц Φ и $\bar{\Phi}$ обозначим $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ и $\bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_n$ соответственно.

Рассмотрим два экземпляра пространства $\mathbb{C}^N$: одно из них $\mathbb{C}^N_x$ с переменными $x = (x_\lambda)$, а другое $\mathbb{C}^N_s$ с переменными $s = (s_\lambda)$, причем $\mathbb{C}^N_s$ будем трактовать как пространство однородных координат для $\mathbb{CP}^{N-1}$. Определим алгебраическое (многозначное) отображение

$$\Delta : \mathbb{CP}^{N-1}_s \to \mathbb{C}^N_x$$

из проективного пространства в пространство коэффициентов $x = (x_\lambda)$ системы (3.12), полагая

$$x^{(i)}_\lambda = -\frac{s^{(i)}_\lambda}{\langle \bar{\varphi}_i, s\rangle} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\langle \bar{\varphi}_k, s\rangle}{\langle \varphi_k, s\rangle} \right)^{\varphi_{k\lambda}}, \ \lambda \in \Lambda^{(i)}, \ i = 1, \ldots, n, \qquad (3.13)$$

где $\varphi_{k\lambda}$ — координата с номером $\lambda \in \Lambda^{(i)} \subset \Lambda$ строки φ_k.

Поясним, как выбираются ветви корней из дробно-линейных функций в формуле (3.13). Введем для этих функций обозначения

$$W_k = \frac{\langle \bar{\varphi}_k, s \rangle}{\langle \varphi_k, s \rangle},\ k = 1, \ldots, n.$$

По теореме об инвариантных множителях для матрицы ω имеет место представление $A\omega B = D_m$, где A, B — унимодулярные матрицы, D_m — диагональная матрица с числами $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$ на диагонали. Поэтому имеет место равенство $\omega^{-1} = BD_m^{-1}A$ с унимодулярными матрицами A и B. Поэтому в обозначениях $W = (W_1, \ldots, W_n)$, $W^B = V$ произведения в (3.13) можно записать в виде

$$\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\langle \bar{\varphi}_k, s \rangle}{\langle \varphi_k, s \rangle} \right)^{\varphi_{k\lambda}} = W^{\varphi_\lambda} = \left(W^B\right)^{D_m^{-1}A\lambda} = \left(V_1^{1/m_1}, \ldots, V_n^{1/m_n}\right)^{A\lambda},$$

где φ_λ - вектор-столбец с координатами $\varphi_{k\lambda}$. Для всех $\lambda \in \Lambda$ векторы $A\lambda$ целочисленные. Выбирая для каждого k все m_k значений корня V_k^{1/m_k}, получим все требуемые ветви для Δ. Формально их $m_1 \ldots m_n = |det\omega|$, но некоторые из этих ветвей могут повторяться.

Теорема 3.3 [2] *Дискриминантное множество* ∇ *системы* (3.12) *параметризуется по формуле* (3.13). *Если* ∇ *имеет неприводимые компоненты, зависящие от всех групп переменных коэффициентов* $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$, *то объединение всех таких компонент также параметризуется по формуле* (3.13).

Предположим, что в каждом уравнении системы (3.12) хотя бы два монома имеют переменные коэффициенты, т.е. все мощности $|\Lambda^{(i)}| \geqslant 2$. Для каждого i от 1 до n выберем в i-ом уравнении пару показателей $\lambda^{(i)}, \mu^{(i)} \in \Lambda^{(i)}$, и организуем целочисленную $n \times n$ - матрицу

$$\varkappa = (\lambda^{(1)} - \mu^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n)} - \mu^{(n)})$$

из столбцов $\lambda^{(i)} - \mu^{(i)}$.

Теорема 3.4 [1] *Предположим, что дискриминантное множество* ∇ *системы* (3.12) *является неприводимой гиперповерхностью и определяющий* ∇ *дискриминант* D *зависит от всех групп коэффициентов* $x_\lambda^{(i)}, i = 1, \ldots, n$. *Тогда в обозначениях* $D_\lambda = \partial D / \partial x_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, *кратные решения системы* (3.12) *на множестве* ∇_{reg} *гладких точек* ∇ *представляются в виде матричных радикалов*

$$y(x) = \left(\frac{D_{\lambda^{(1)}}}{D_{\mu^{(1)}}}, \ldots, \frac{D_{\lambda^{(n)}}}{D_{\mu^{(n)}}} \right)^{\varkappa^{-1}}, \tag{3.14}$$

где $\varkappa$ *пробегает семейство* $\{\varkappa\}$ *невырожденных целочисленных матриц, построенных выше по столбцам* $\lambda^{(i)} - \mu^{(i)}$ *из разностей по Минковскому* $\Lambda^{(i)} - \Lambda^{(i)}$.

3.5 Пример

Рассмотрим приведенную систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} y_1^2 + ay_1 + by_2 - 1 = 0, \\ y_2^3 + cy_2 + dy_1 y_2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Здесь мономы с коэффициентами a и b имеют показатели $\lambda^{(1)} = (1, 0)$ и $\mu^{(1)} = (0, 1)$, следовательно, $\varkappa^{(1)} = (1, -1)$. Аналогично для второго уравнения мономы с коэффициентами c и d имеют показатели $\lambda^{(2)} = (0, 1)$ и $\mu^{(2)} = (1, 1)$, а $\varkappa^{(2)} = (-1, 0)$. Поэтому матрицы $\varkappa$ и обратная к ней $\varkappa^{-1}$ следующие:

$$\varkappa = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \varkappa^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.4 дает рациональное выражение для кратных корней в терминах производных дискриминанта D по переменным a, b, c, d:

$$y_1 = \frac{D_d}{D_c}, y_2 = \frac{D_b}{D_a} \frac{D_d}{D_c},$$

где

$$\Delta = -4a^7b^2c^2d^5 + 27a^4b^4c^2d^6 + 16a^9c^3d^3 + 16a^6b^3d^6 - 112a^6b^2c^3d^4 - 8a^6b^2cd^6 - 108a^3b^5d^7-$$
$$- 54a^3b^4c^3d^5 + 54a^3b^4cd^7 - 72a^8bcd^4 - 48a^8c^4d^2 + 48a^8c^2d^4 + 510a^5b^3cd^5 + 620a^5b^2c^4d^3-$$
$$- 392a^5b^2c^2d^5 - 4a^5b^2d^7 + 162a^2b^5cd^6 + 27a^2b^4c^4d^4 + 54a^2b^4c^2d^6 + 27a^2b^4d^8 + 216a^7bc^2d^3-$$
$$- 72a^7bd^5 + 48a^7c^5d + 96a^7c^3d^3 + 48a^7cd^5 - 2766a^4b^3c^2d^4 + 702a^4b^3d^6 - 1144a^4b^2c^5d^2+$$
$$+ 1136a^4b^2c^3d^4 - 440a^4b^2cd^6 + 162ab^5c^2d^5 - 486ab^5d^7 - 216ab^4c^3d^5 + 216ab^4cd^7 + 108a^9d^3-$$
$$- 945a^6b^2d^4 - 144a^6bc^3d^2 - 720a^6bcd^4 - 16a^6c^6 - 528a^6c^4d^2 + 528a^6c^2d^4 + 16a^6d^6+$$
$$+ 1350a^3b^4d^5 + 3488a^3b^3c^3d^3 - 432a^3b^3cd^5 + 896a^3b^2c^6d + 480a^3b^2c^4d^3 - 256a^3b^2c^2d^5-$$
$$- 160a^3b^2d^7 - 729b^6d^6 - 108b^5c^3d^4 + 972b^5cd^6 + 108b^4c^4d^4 - 216b^4c^2d^6 + 108b^4d^8 - 324a^8cd^2+$$
$$+ 4266a^5b^2cd^3 + 2592a^5bc^2d^3 - 864a^5bd^5 + 576a^5c^5d - 384a^5c^3d^3 + 576a^5cd^5 + 1620a^2b^4cd^4+$$
$$+ 816a^2b^3c^4d^2 - 11664a^2b^3c^2d^4 + 2592a^2b^3d^6 - 256a^2b^2c^7 - 3776a^2b^2c^5d^2 + 5504a^2b^2c^3d^4-$$
$$- 1344a^2b^2cd^6 + 324a^7c^2d + 1620a^7d^3 - 7722a^4b^2c^2d^2 - 7074a^4b^2d^4 - 1728a^4bc^3d^2 - 1728a^4bcd^4-$$
$$- 192a^4c^6 - 1728a^4c^4d^2 + 1728a^4c^2d^4 + 192a^4d^6 - 12960ab^4c^2d^3 + 9720ab^4d^5 - 3072ab^3c^5d+$$
$$+ 24192ab^3c^3d^3 - 12960ab^3cd^5 + 3584ab^2c^6d - 8000ab^2c^4d^3 + 4992ab^2c^2d^5 - 576ab^2d^7+$$
$$+ 486a^6bd^2 - 216a^6c^3 - 4536a^6cd^2 - 10962a^3b^3d^3 + 6912a^3b^2c^3d + 27216a^3b^2cd^3 + 10368a^3bc^2d^3-$$
$$- 3456a^3bd^5 + 2304a^3c^5d - 3584a^3c^3d^3 + 2304a^3cd^5 + 8748b^5d^4 + 8640b^4c^3d^2 - 19440b^4cd^4+$$
$$+ 1024b^3c^6 - 12096b^3c^4d^2 + 12960b^3c^2d^4 - 864b^3d^6 - 1024b^2c^7 + 3200b^2c^5d^2 - 3328b^2c^3d^4+$$
$$+ 1152b^2cd^6 + 3888a^5c^2d + 9072a^5d^3 + 28836a^2b^3cd^2 - 3456a^2b^2c^4 - 41040a^2b^2c^2d^2-$$
$$- 14688a^2b^2d^4 - 6912a^2bc^3d^2 + 2304a^2bcd^4 - 768a^2c^6 - 768a^2c^4d^2 + 768a^2c^2d^4 + 768a^2d^6+$$
$$+ 5832a^4bd^2 - 2592a^4c^3 - 23328a^4cd^2 - 20736ab^3c^2d - 36936ab^3d^3 + 27648ab^2c^3d + 40608ab^2cd^3+$$
$$+ 13824abc^2d^3 - 4608abd^5 + 3072ac^5d - 6144ac^3d^3 + 3072acd^5 - 729a^6 + 5832a^3b^2d+$$
$$+ 15552a^3c^2d + 22464a^3d^3 - 34992b^4d^2 + 13824b^3c^3 + 73872b^3cd^2 - 13824b^2c^4 - 40608b^2c^2d^2-$$
$$- 6048b^2d^4 - 9216bc^3d^2 + 9216bcd^4 - 1024c^6 + 3072c^4d^2 - 3072c^2d^4 + 1024d^6 - 11664a^2b^2c+$$
$$+ 23328a^2bd^2 - 10368a^2c^3 - 51840a^2cd^2 - 8748a^4 + 23328ab^2d + 20736ac^2d + 20736ad^3+$$
$$+ 46656b^3 - 46656b^2c + 31104bd^2 - 13824c^3 - 41472cd^2 - 34992a^2 - 46656.$$

3.6 Двукратные корни разреженных уравнений

Рассмотрим разреженное уравнение

$$x_d y^d + x_{m_p} y^{m_p} + \cdots + x_{m_1} y^{m_1} + x_0 = 0, \tag{3.15}$$

сопоставленное набору $\{0, m_1, \ldots, m_p, d\} \subset \mathbb{Z}$. Для разреженных уравнений сужение решения $y(x)|_\nabla$ не всегда допускает рациональные представления. Причиной тому служит тот факт, что для них страт $\mathbf{M^2} = \mathbf{M^{2,1,\ldots,1}}$ может быть пустым, и в этом случае самым массивным (плотным) на ∇ будет другой страт.

Простейший пример такой ситуации доставляет биквадратное уравнение

$$ay^4 + by^2 + c = 0,$$

корни которого выражаются формулами

$$y_{1,2} = \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}},\ y_{3,4} = \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Оно имеет кратные корни на объединении поверхностей

$$b^2 - 4ac = 0,\ \ c = 0.$$

Однако, по определению дискриминанта, компонента $c = 0$ не входит в дискриминантное множество ∇, поскольку в общей точке p этой компоненты (где $b \neq 0$) уравнение имеет лишь нулевое двукратное решение, тем самым, $p \notin \nabla^0$ и, в силу общности, $p \notin \nabla$. Таким образом, двукратные корни на ∇- это пара значений радикала $y = (-b/2a)^{1/2}$, ветвящихся на ∇ вокруг прямой $b = a = 0$. Следовательно, ни одно из кратных решений биквадратного уравнения не может представляться однозначной функцией на ∇, значит, и рациональной функцией. В итоге получаем, что $\mathbf{M^2} := \mathbf{M^{2,1,1}} = \emptyset$, а $\mathbf{M^{2,2}}$-плотный страт в ∇ и на нем кратные решения представляются радикалом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В бакалаврской работе изучен метод нахождения кратных решений алгебраических уравнений и систем, основанный на вычислении результантов многочлена и его производных (дискриминанта уравнения или системы). С целью освоения указанного метода изучены следующие аспекты теории алгебраических уравнений:

- дискриминантное множество системы полиномов,

- стратификация дискриминантного множества алгебраического уравнения,

- параметризация дискриминантного множества уравнения и системы уравнений.

Все изложенные в работе методы исследования решений уравнений и систем сопровождены примерами.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Антипова, И.А. Рациональные выражения для кратных корней алгебраических уравнений / И.А. Антипова, Е.Н. Михалкин, А.К. Цих // Матем. сб. — 2018. — Т. 209, № 27. — С. 3-30.

[2] Антипова, И.А. Дискриминантное множество системы n полиномов Лорана от n переменных / И.А. Антипова, А.К. Цих // Сер. матем. — 2012. — Т. 76, № 5. — С. 29-56.

[3] Курош, А.Г. Курс высшей алгебры : учебник / А.Г. Курош — Москва : Наука, 1968.

[4] Михалкин, Е.Н. Сингулярные страты каспидального типа для классического дискриминанта / Е.Н. Михалкин, А.К. Цих // Матем сб. — 2015. — №2. — С. 119-148.

[5] Birkeland, R. Über die Auflösung algebraischer Gleichungen durch hypergeometrische Funktionen / R. Birkeland // Math. Ztschr. — 1927. — №26. — P. 566-578.

[6] Esterov, A. The discriminant of a system of equations / A. Esterov // Advances in Math. — 2013. — V. 245. — P. 534-572.

[7] Hilbert, D. Über die Singularitäten der Discriminantalflache / D. Hilbert // Math. Ann. — 1887. — P. 437–441.

[8] Katz, G. How Tangents Solve Algebraic Equations, or a Remarkable Geometry of Discriminant Varieties / G. Katz // Expo. Math. — 2003. — V. 21. — P. 219-261.

[9] Kurmann, S. Some remarks on equations defining coincident root loci / S. Kurmann // Journal of Algebra. — 2012. — V. 352. — P. 223-231.

[10] Lee, H. Duality of Multiple Root Loci / H. Lee, B. Sturmfels // Journal of Algebra. — 2016. — V. 446. — P. 499-526.

[11] Mellin, H.J. Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma / H.J. Mellin // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. — 1921. — V. 172. — P. 658-661.

[12] Passare, M. Algebraic equations and hypergeometric series / M. Passare, A. Tsikh // Springer. — 2004. — P. 653-672.

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт космических и информационных технологий
Кафедра прикладной математики и компьютерной безопасности

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
________ А.А. Кытманов
18 06 2018 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

01.03.04 Прикладная математика

Рациональные выражения для кратных решений
полиномиальных уравнений и систем

Руководитель Ant 13.06.18 профессор, д.ф-м.н. И.А. Антипова
подпись, дата

Выпускник Kom 11.06.18 П.С. Комарова
подпись, дата

Красноярск 2018